

**Zadania z poprzednich Wolskich Międzyszkolnych Konkursów
Matematycznych „Co z tą matematyką...?”**

Zadanie 1

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym, suma długości przyprostokątnych równa jest sumie średnic koła wpisanego w ten trójkąt i koła opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 2

Z dziesięciu zapalek można bez trudu ułożyć dwa pięciokąty. A jak ułożyć z nich dwa pięciokąty i pięć trójkątów?

Zadanie 3

Uczniów biorących udział w olimpiadzie matematycznej należało umieścić w salach tak, by w każdej sali była ta sama liczba osób, przy czym nie więcej niż 32 osoby. Kiedy najpierw w każdej sali umieszczono po 22 osoby, dla jednego zawodnika zabrakło miejsca. Gdy zaś z jednej zrezygnowano, miejsc w pozostałych wystarczyło dla wszystkich. Ilu zawodników wzięło udział w olimpiadzie oraz ile sal przygotowano dla nich?

Zadanie 4

Obecnie córka i matka mają razem 34 lata. Za cztery lata wiek matki będzie kwadratem wieku córki. Ile lat ma obecnie matka, a ile córka?

Zadanie 5

Długość prostokąta powiększono o $p\%$, szerokość zmniejszono o $p\%$ i otrzymano prostokąt, którego pole jest 16% mniejsze od pola pierwotnego prostokąta. Oblicz p .

Zadanie 6

Rozstrzygnij, która z liczb jest większa: 22^{55} czy 55^{22} ? Odpowiedź uzasadnij odpowiednimi obliczeniami.

Zadanie 7

W klasie I jest nie więcej niż 50 uczniów. Z klasówki $\frac{1}{7}$ otrzymała piątkę, $\frac{1}{3}$ czwórkę i połowa trójkę. Pozostali uczniowie otrzymali ocenę dopuszczającą. Ilu było uczniów w klasie, a ilu dostało ocenę dopuszczającą?

Zadanie 8

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $xyz > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z$$

Zadanie 9

W trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych wynosi $\sqrt{18}$, a przeciwprostokątna ma długość 4. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 10

Pan X powiedział, że gdy sumę lat trojga jego dzieci pomnożymy przez jego wiek to otrzymamy 128. Wiek pana X jest liczbą całkowitą o sumie cyfr równej 5. Po ile lat mają: pan X i jego dzieci?

Zadanie 11

Naszkcuj wykres funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{100 - 40x + 4x^2}}{x - |1 - \sqrt{2}| - 6 + \sqrt{2}}$.

Zadanie 12

Sześciokąt foremny ma pole równe 36. Oblicz pole gwiazdy sześcioramiennej wyznaczonej przez krótsze przekątne tego sześciokąta.

Zadanie 13

Wiadomo, że trawa na całym polu rośnie jednakowo gęsto i szybko. 60 krów zjada trawę w ciągu 24 dni, 30 krów zjada ją w ciągu 60 dni. Ile krów będzie zjadało trawę w ciągu 100 dni?

Zadanie 14

Po owalnym torze o długości 600 m jeździ dwóch rowerzystów. Jeśli jadą w tym samym kierunku, to mijają się co 12 minut. Jeśli jadą w przeciwnych kierunkach to mijają się co 1 minutę i 12 sekund. Oblicz prędkości rowerzystów.

Zadanie 15

Dane są liczby $a = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$ i $b = (18^{-4} : 3^{-8})(2\sqrt{2})^4$

- Wykaż, że liczba a jest liczbą wymierną.
- Porównaj liczby a i b .

Zadanie 16

Pięć pająków łapie 5 much w ciągu 5 godzin. Ile much złapie 100 pająków w ciągu 100 godzin ?. Odpowiedz uzasadnij.

Zadanie 17

Nazwijmy liczbą symetryczną taką liczbę naturalną, której cyfry stojące na miejscach pierwszy i ostatnim, drugim i przedostatnim itd. są takie same, np. 3553, 474. Ile jest liczb symetrycznych trzycyfrowych, a ile czterocyfrowych ?.

Zadanie 18

Według legendy na płycie Diofantosa był taki napis ułożony przez Eutriopiusa: „ Przechodniu ! Pod tym kamieniem spoczywają prochy Diofantosa, który umarł w głębokiej starości. Przez szóstą część swego życia był dzieckiem, przez dwunastą część – młodzieńcem. Następnie upłynęła siódma część jego życia, zanim się ożenił. W pięć lat po zawarciu związku małżeńskiego urodził mu się syn, który żył dwa razy krócej od niego. W cztery lata po śmierci swojego syna Diofantos, oplakiwany przez swych najbliższych, zasnął snem wiecznym. Oblicz, jeżeli umiesz, ile on miał lat, kiedy zmarł.”

Zadanie 19

Suma długości boków AC i BC trójkąta ABC wynosi 20 cm. Miary kątów A i B są równe odpowiednio 30° i 45° . Oblicz długości boków AC i BC.

Zadanie 20

Wykaż, że różnica $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{|40\sqrt{2} + 57|}$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 21

Zbadaj, która z liczb jest większa: $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ czy $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

Zadanie 22

Wykaż, że:

$$a) \frac{9}{100} < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{10}$$

$$b) \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$$

Zadanie 23

Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 1 000 000 i podzielnych przez 6, które można zapisać za pomocą cyfr 0, 1, 2 ?

Zadanie 24

Ile jest różnych liczb naturalnych, mniejszych od liczby $2 \cdot 10^8$, podzielnych przez 3, które można zapisać za pomocą cyfr 0, 1, 2 ?

Zadanie 25

Zapytany o rok urodzenia pewien mężczyzna odpowiedział: „W roku x^2 miałem x lat”. Podaj rok urodzenia tego mężczyzny, jeżeli rozmowa odbyła się w XX wieku.

Zadanie 26

Wykaż, że jeżeli $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi, n jest liczbą naturalną nie mniejszą niż 2, to:

$$\frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Zadanie 27

Napisz największą liczbę spośród tych liczb, które można zapisać za pomocą czterech dwójek, bez użycia innych znaków, np. bez nawiasów, silni oraz działań arytmetycznych z wyjątkiem potęgowania.

Zadanie 28

Wykazać, że:

$$\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 \geq 4,4$$

Zadanie 29

Ile jest różnych liczb n – cyfrowych, które są zapisane za pomocą dwóch różnych cyfr ?

Zadanie 30

Wykazać, że jeżeli wysokość i środkowa boku trójkąta poprowadzona z tego samego wierzchołka, dzielą kąt przy wierzchołku na trzy kąty przystające, to trójkąt jest prostokątny. Wyznacz miary dwóch pozostałych kątów tego trójkąta.